

## 巧妙的空城計 — 諸葛亮如何化解危機？

歷史上的三國是一個戰馬喧騰的年代，在璀璨卻又動盪不堪的時空背景下，鼎立的魏蜀吳，較勁的不僅僅是領導人的實力，更是手下軍師的腦袋！而孔明(圖一.)的空城計就是發生在這個時代最為人津津樂道的故事之一！

### 用數學窺探謀略

這個發生在《三國演義》裡面的故事是這樣的：諸葛孔明任用大將馬謖鎮守軍事重地—街亭，卻因馬謖帶兵不當敗給魏軍，將領地拱手讓人。效力於曹魏的司馬懿乘勝追擊，統領十五萬大軍浩浩蕩蕩的朝諸葛孔明所在之地—西城—攻去。此時諸葛亮身邊只有一班文官和兩千餘名士兵，諸葛亮便命令士兵將四方城門大開，並各派二十名士兵喬裝成百姓灑掃，自己則高坐城牆上焚香彈琴。司馬懿揮大軍兵臨城下，見此狀況，以為諸葛亮胸有成竹，懼怕中了埋伏而下令撤兵。諸葛亮運用智慧解決一次危機，這就是空城計的故事。不論空城計是歷史上真人真事或者僅為小說家編纂而成，都引起後代的關切，廣泛的應用在管理學門上，但是，我們可以用精巧的數學一窺孔明和司馬懿鬥智鬥力的過程！

這種數學方法就是所謂的博弈論，或稱為賽局理論(Game Theory)。賽局理論是由大數學家馮紐曼(John Von Neumann)和經濟學者摩根斯坦(Oskar Morgenstern)共同發展出來(圖二 a.b.)，主要在描述兩個以上具有利益的衝突的個體(player)，彼此運用策略(strategy)得到自己最好結果(pay-off)的過程。雖然賽局理論訴諸複雜的數學，但其實核心概念很簡單，當我們在做選擇的時候，我們的決定會影響他人的最終決定，相同的，他人的決定也會影響我們的最終決定。在思考的時候，將這些會被別人影響的因素加進來，再從中選出對自己最好的決定，這就是賽局理論的精髓。

### 報償矩陣(Pay-Off Matrix)

我們可以運用簡單的圖表來理解所謂的賽局，例如圖三.這些簡單的格子其實已經完整的表達了「一個賽局」。May 和 Tom 是一對情侶，他們約好今天要一起用餐。昨晚兩人在 MSN 上討論的時候，May 表示想吃法式料理，Tom 卻堅持要去三十年傳統小吃攤，在「吃什麼」這件事情上，May 和 Tom 已然形成衝突的局面(此時二人都已經加入這個賽局了)！昨天晚上鬧的有點不愉快，討論也就在僵局中不了了之，今天出門時 May 開始思考：我是要到法國料理餐廳赴約？還是傳統小吃攤？

圖三的格子裡面的數字是量化過後的「感覺」，在經濟學上稱為效用(utility)，那是一種抽象的心理滿足程度。數字只是想要比較參賽者之間感覺「好」的程度高低，並沒有實質上的意義。當然，也可以選擇用報償函數(pay-off function)表示，但那會把事情搞的非常複雜(或者說非常精確)！

因為 May 和 Tom 昨天晚上討論過餐廳了，因此他們兩個完全了解那四個格子畫出對於選擇餐廳這件事情的所有可能性，在這樣的條件下，就是一種訊息的完全開放(perfect information)，但如果 Tom 想要給 May 來個生日驚喜，就另當別論了！訊息(information)在賽局裡面是非常重要的，之後討論空城計中可以了解到這點。

### 兵來將擋—擴展式賽局(Extensive Form Game)

May 和 Tom 決定「今天」要在哪裡用餐，過了今天決定在哪裡用餐就沒有意義了，因此可視 May 和 Tom 的選擇是「同時進行」的。圖三.畫的格子稱為「棋盤式方格」，最適合表達這種同時進行的賽局。但是，作戰通常是「兵來將擋，水來土掩」，先有兵(水)來才有將擋(土)掩，利益衝突的個體做具有順序性的選擇(move sequentially)時，就適合用賽局另外一種形式—擴展式—來敘述，圖形也比較適合用樹枝狀(見圖四.)來表達。

圖五.是用樹枝圖表達的空城計過程。第一個做決定的是 Nature，也就是所謂的大自然，有時候人對於既定事實無能為力，做再多的決策也無法改變現狀，在這個故事中孔明在危急存亡之際沒辦法快速調度兵馬來到西城就是如此的情況，也因此討論賽局的時候會適時的加入一個不可撼動的大自然。

順著分支下來，遇到的第一個節點做決策的人是孔明，孔明針對已發生的事實(兵多或者兵少)做出決策。孔明可以選擇使用空城計，或者不使用空城計。或許孔明實際上還有更多的選擇，但在此暫時只將「使用空城計」和「不使用空城計」納入行動集合(action set)之中，所謂的行動集合有點類似參賽者的智囊團，七嘴八舌的提供很多可行的方案，而參賽者就從中挑選對自己最有利的方案來執行，值得注意的一點是：沒有被提出的方案，不可能被執行！所有的方案都已經被侷限在行動集合裡面了！當孔明決定好是否使用空城計之後，司馬懿再根據孔明的決策選擇對自己最有力的行動(進攻或退兵)。

### 均衡的美麗境界

光是描述利益衝突的參賽者之間的互動關係還不夠，數學家 John F. Nash, Jr.(圖六.)試圖找尋每一個賽局中的均衡解。簡單闡述 Nash 均衡就是競爭對手之間根據對方的決策，都拿出最好的決策去應對，決策的「好壞」則視最後的報酬而定。這

也隱含了所有參賽者的目的都是要讓自己在賽局結束的時候得到最多好處(profit maximization)，並且爲了達到這個目的不擇手段(reasonable)。用剛才提過的簡單例子說明：

May 的決策→如果 Tom 到法式料理餐廳，我就到法式料理餐廳。

如果 Tom 到小吃攤，我也會去小吃攤。

Tom 的決策→如果 May 到法式料理餐廳，我就到法式料理餐廳。

如果 May 到小吃攤，我也會去小吃攤。

因應對手不同的決策，自己也會隨著更改決策，讓自己得到比較多的好處。從這個例子可以看出來，「如果 Tom 到法式料理餐廳，我就到法式料理餐廳」、「如果 May 到法式料理餐廳，我就到法式料理餐廳」這是相互呼應的，在選擇「法式料理餐廳」上，彼此都拿出最佳的對策去回應對手，因此，兩人都選擇法式料理餐廳這個決策就是所謂的 Nash 均衡解，同理，兩人都選擇傳統小吃攤的決策也是一個 Nash 均衡解。一個賽局可能沒有均衡解(小時候玩的剪刀石頭布遊戲其實就是一個沒有 Nash 均衡的賽局，沒有人可以一輩子出剪刀或石頭或布必贏的)，但也可能有很多個 Nash 均衡解(例如上述中的一起到小吃攤或一起到法式餐廳)！

同樣的在探討擴展式賽局的時候也可以找出 Nash 均衡解，但是有時候會找到不適當的均衡解(incredible threat)，因此發展出另外一種找解的簡單方法：子賽局均衡(subgame equilibrium)。如果子賽局均衡同時又是 Nash 均衡，則稱這個均衡爲子賽局完全均衡(subgame perfect equilibrium)。子賽局均衡主要採取的是後顧法(back-ward looking)，將賽局拆解成子賽局，直接從結局去推測最好的解決方法。

### 訊息的不完全與不完備

如果司馬懿知道孔明兵力多寡，還會被空城計騙倒嗎？若司馬懿當時做好情蒐的工作，徹底掌握了孔明的實力，而且孔明也知道司馬懿完全掌握了他兵力的狀況，這種競爭對手彼此都了解對方可用的策略、實力的狀況稱爲完全訊息(perfect information)狀態，更進一步來說，司馬懿是後決策的參賽者，如果他看到孔明採取的行動，而且非常清楚孔明做完決策自己下一步該要怎麼走，這樣來說就是一個完備訊息的狀態(complete information)。在完全訊息與完備訊息的狀態下，孔明和司馬懿會做出什麼樣的決定呢？藉由子賽局均衡求解法(圖七.)可以得知，在 Nature 決定孔明兵力少的狀態下，孔明會決定不使用計策，趕緊逃跑或許還可以勉強保住自己的性命，讓損失降到最低；司馬懿則會選擇一舉攻下西城，因爲他已經知道西城裡面僅僅只有 2500 名士兵。

那麼，為什麼孔明可以藉由空城計化解危機呢？原因就在於不完備訊息(incomplete information)。孔明知道司馬懿的策略只有進攻或退兵，而司馬懿也知道孔明的策略是使用計謀和不用計謀(具有完全訊息)，但是司馬懿卻無法知道孔明做完決策後自己下一步應該要怎麼走，因為他並不確定自己正處於賽局的哪一個階段，這種混亂的狀態表示司馬懿陷入含有一個節點以上的訊息集(information set)五里霧之中，這個不明朗的情勢也影響了司馬懿的判斷，正是空城計成功的原因。

## 混合策略賽局

當賽局裡頭有包含一個節點以上的訊息集，參賽者做決策的時候就會牽扯到機率了！參賽者有自己所依據的方式去判斷自己所在的階段，有可能是憑過去的經驗，但也有可能像是買彩卷一樣——憑運氣亂猜一通！此種牽涉到機率的賽局，就稱為混合策略賽局(Mixed Strategy)。

空城計中，司馬懿就是憑藉過去經驗猜測孔明兵力的多寡，因為孔明素來以謹慎和謀略出名，不可能打沒有把握的仗，因此司馬懿才會認為孔明的兵力一定非常的充足。站在孔明的立場來看，孔明也就是深知這個道理，才敢大膽的使用空城計。

當牽涉到機率的時候，用來選擇決策好壞的重點就在於期望報酬(expectative payoff)，所謂的期望報酬就是機率乘以報償值得到的結果。以擲銅板為例，一個公正的銅板，擲出正面和反面的機率都是 0.5，如果擲出正面可以得到 5 元，擲出反面則要付 3 元，則每擲一次銅板的期望報償為  $0.5 \times 5 + 0.5 \times (-3) = 1$  元。

假設司馬懿根據經驗加上看到孔明高坐城牆老神在在，因此猜測孔明兵多的機率為 0.8，孔明兵少的機率為 0.2。(這當然是簡化過後的機率值，就如同數值報償可以用複雜的報償函數表示，機率也可以用複雜的機率分配函數計算)根據圖九. 可以分別計算出攻擊和退兵的期望報酬，計算完成的結果列在圖十 a.和圖十 b.。圖 a 的表格第一列的括號表示司馬懿的猜想，意即(孔明在兵多時的策略，孔明在兵少時的策略)，表格的第一欄表示司馬懿將要採取的策略。

以紫色空格為例，表示司馬懿猜測(孔明在兵多的時候會用空城計，孔明在兵少的時候也用空城計)，自己則打定主意不論如何都要進攻，因此，根據圖九，當孔明兵多時使用空城計，而自己還勉強進攻時，得到的報償是(-6)，再乘以兵多的機率為 0.8；當孔明兵少時使用空城計，而自己堅持進攻時，得到的報償是 9，再乘以兵少的機率為 0.2，因此得到紫色空格中的算式  $0.8 \times (-6) + 0.2 \times 9$ ，計算出的

結果列在圖 b。圖 b 揭示了空城計的成功之處，司馬懿懷疑孔明兵多的機率較高之下(0.8)，司馬懿不論在何種情況下退兵的預期報酬都比進攻的期望報酬高！因此司馬懿毅然決然令「後軍作前軍，前軍作後軍」，撤退去囉！

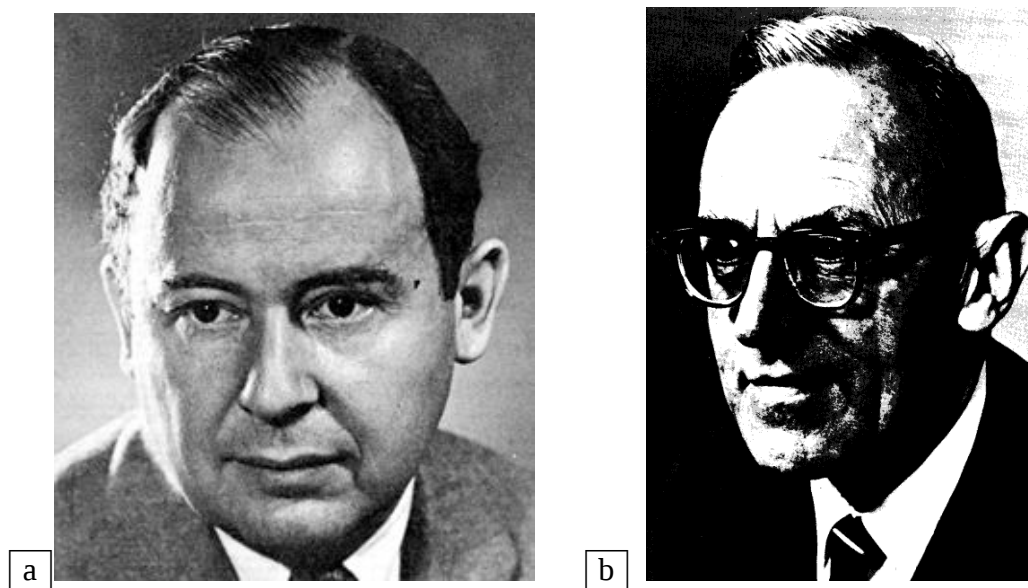
下一次如果冤家路窄，司馬懿又遇上諸葛孔明，或許司馬懿會學得教訓調整猜測的機率，這就是所謂的信念(believe)修正，因為信念的改變，將會大大顛覆賽局的結果！

或許要靠極端的聰明智慧才可以熟稔的運用賽局理論於一般生活中，但不管怎麼說，馮紐曼總是提供了一個理性科學的方法去解讀所謂的策略問題！如果厭倦了老是看電影、逛街，或許你可以和你的情人試著用賽局理論討論晚餐地點，絕對是消磨時間的好辦法！



圖一.諸葛亮(181~234)，字孔明，效力於蜀漢，以機智和謀略聞名天下，因此又被稱為「臥龍先生」。(圖片來源：

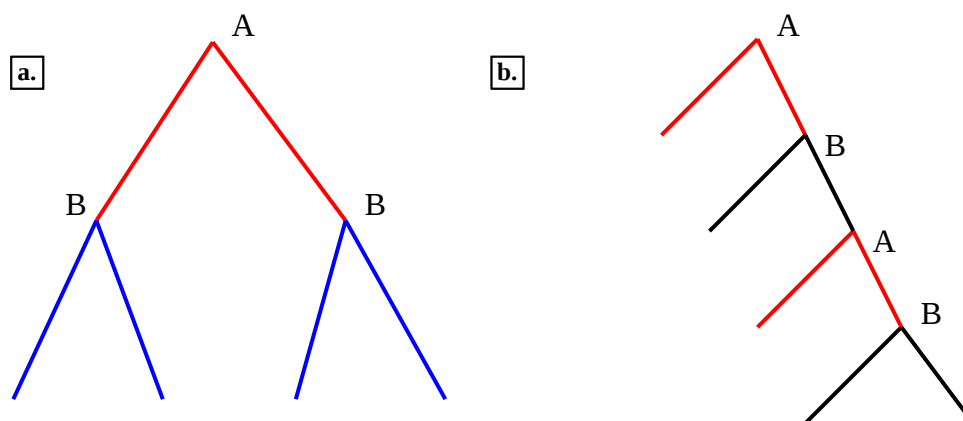
[http://mychannel.pchome.com.tw/channel/class/show\\_preview.php3/?d=2000-10-23&enname=hulk4677&t=.htm&fn=main&view=1](http://mychannel.pchome.com.tw/channel/class/show_preview.php3/?d=2000-10-23&enname=hulk4677&t=.htm&fn=main&view=1))



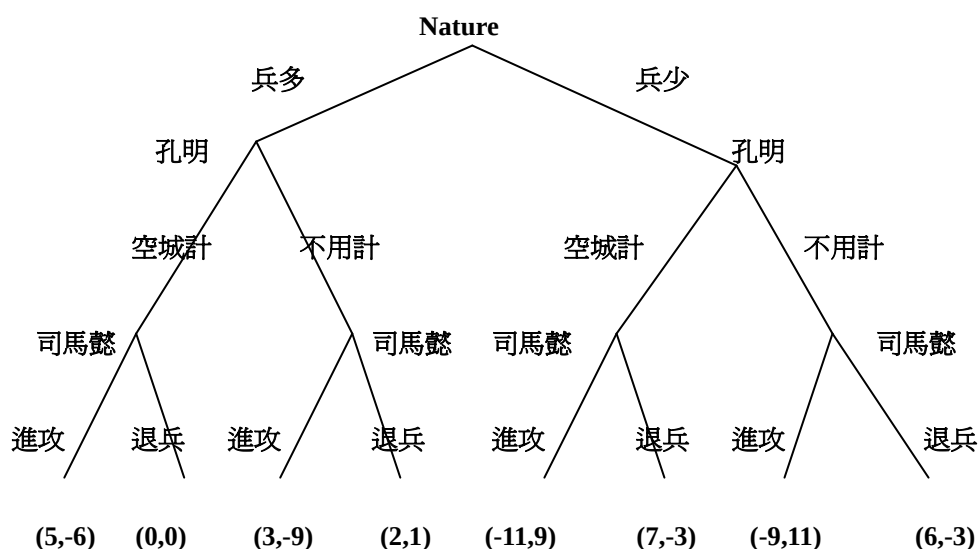
圖二.a. John von Neumann(1903~1907)，匈牙利籍的美國人，學術研究的範圍從物理學、氣象學、經濟學到電子計算機理論(電腦)無所不包。一生充滿傳奇，甚至有人懷疑John von Neumann有一顆「來自火星的腦袋」。(圖片來源：維基百科) 圖二b. Oskar Morgenstern(1902~1976)，經濟學家。(圖片來源：<http://cepa.newschool.edu/het/profiles/morgenst.htm>)

|     |      | Tom      |          |
|-----|------|----------|----------|
|     |      | 法式料理     | 傳統小吃     |
| May | 法式料理 | (3, 1) * | (0, 0)   |
|     | 傳統小吃 | (0, 0)   | (1, 3) * |

圖三.純粹策略(pure strategy)下的償付矩陣(pay-off matrix)。純粹策略指的是你和你的伴侶很篤定的只會二選一，不是法式料理就是傳統小吃，不牽涉到機率問題。格子裡的數字表示參賽者得到的好處多寡，舉例而言，(3, 1)的括號表示 May 和 Tom 同時選擇法式料理這個策略。左邊量化過後數字 3 表示 May 得到的好處，和心愛的伴侶 Tom 一起用餐，吃的又是自己最喜歡的食物，因此在心理上感到非常的滿足；而 1 則表示 Tom 和 May 在一起用餐很開心，美中不足的是吃的並非自己想吃的傳統小吃，因此得到的好處明顯的比 May 少多了。(\*表示 Nash 均衡)  
(表格來源：自繪)



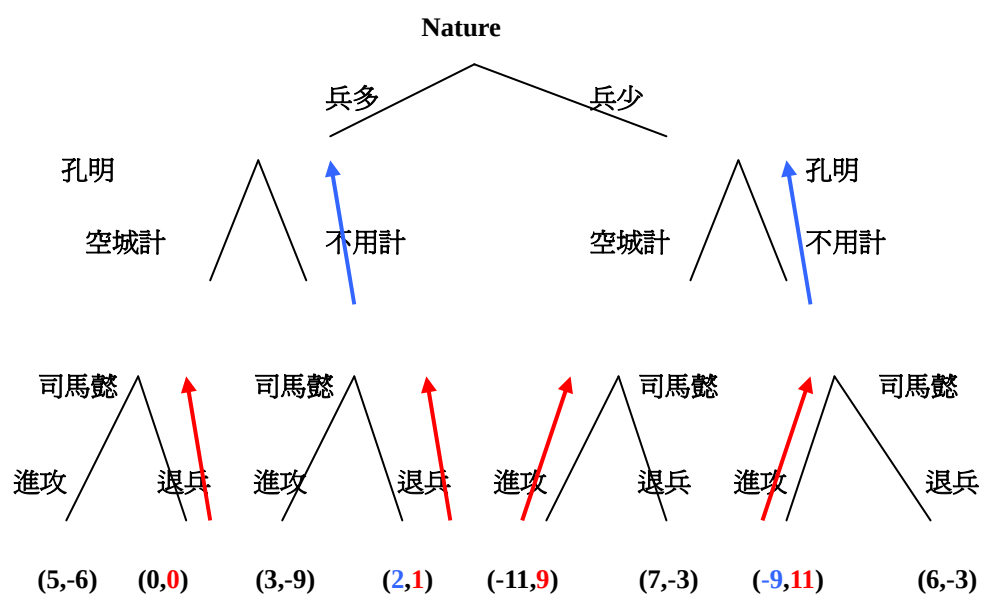
圖四.表達擴展式賽局的樹枝圖。每一條線都被稱為分支(branches)，不同的分支表示不同的決策。分支的交會處稱為節點(nodes，也有文獻以 vertex 表示)，參賽者在節點選擇決策，不同的節點有可能是相同的參賽者做決策。圖四 a，在此賽局中只有 A 和 B 兩個參賽者，並且輪流做決策，當 A 做出決策，有兩條紅色的分支表示參賽者 A 有兩個可以選擇的行動，此時輪到參賽者 B 做決策，之所以左右兩邊的節點都由 B 做決策是因為參賽者 B 會針對參賽者 A 做出的兩個不同決策(左邊決策和右邊決策)提出不同的因應決策。圖四 b.表示只有 A 和 B 兩個參賽者，並且輪流做決策，當 A 做完決策換 B 做決策，不停輪流到賽局到達終點結束，這個賽局不論是 A 或 B 做完決策，左邊的分支都沒有繼續下去，表示當 A 或者 B 做了左邊的決策以後會造成賽局的終結。每一種賽局的形式都不同，視情況而定。(圖片來源：自繪)



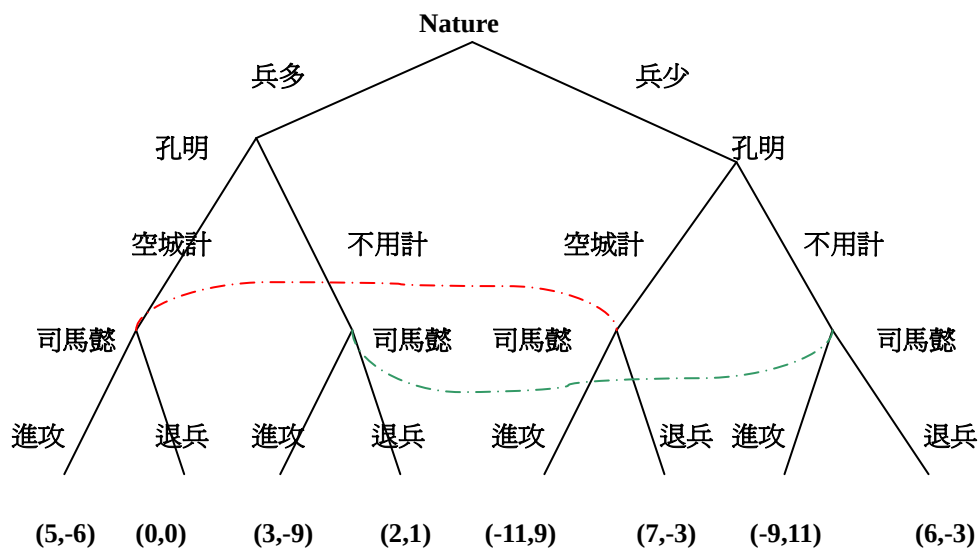
圖五.用樹枝狀圖表示空城計的過程。一開始做決策的人為 Nature，決定孔明的兵力多少。孔明依照自己手上兵力的多寡，選擇使用空城計或者不使用空城計。最後司馬懿再根據孔明使用計謀與否，決定進攻或者退兵。(圖片來源：自繪，靈感來自本校教授期中考試題)



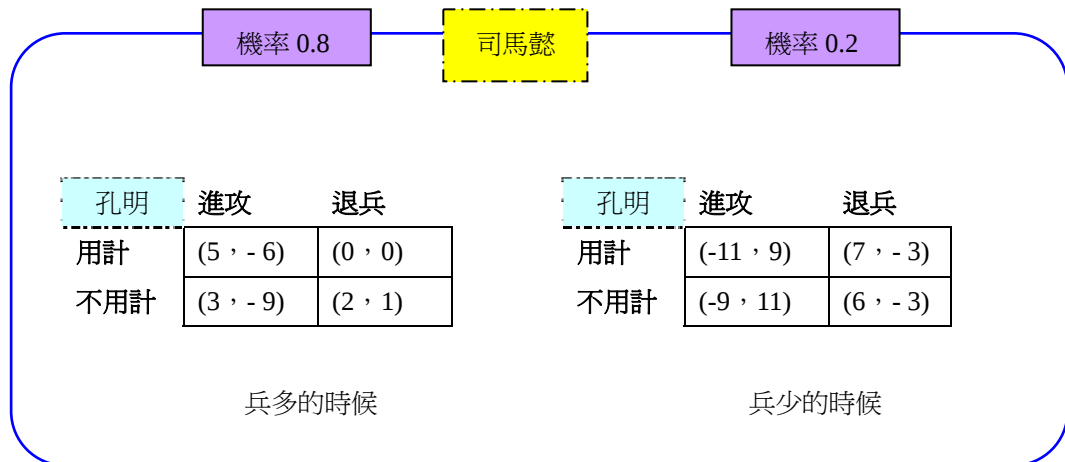
圖六. John F. Nash, Jr., 美籍數學家，在數學方面有亮眼的成就，卻在三十歲時罹患精神疾病，直到老年才從混沌的心智中脫離出來。Nash 證明只要對手的策略確定，賽局必定存在均衡解，又將此解稱為 Nash 均衡解。因為對於賽局方面的貢獻，於 1994 年獲頒諾貝爾經濟學獎。(圖片來源：[http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1994/nash-autobio.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/nash-autobio.html))



圖七. 將賽局分解成子賽局。假設孔明和司馬懿彼此是完全訊息的狀態。司馬懿的決策賽局可以分成四個小賽局，每一個最簡單的小賽局都有兩個決策—退兵或進攻，司馬懿藉由比較報償(小括號中左邊的數值代表孔明的報償，右邊的數值代表司馬懿的報償)決定要選擇哪一個策略。以最左邊的小賽局舉例，報償 0 比報償-5 好，因此司馬懿會選擇進攻的策略。反推回去輪到孔明作選擇，孔明比較司馬懿做的選擇，以左邊的賽局舉例，報償 0 比報償 1 好，因此孔明選擇不用計的策略。(圖片來源：自繪，靈感來自本校教授期中考試題)



圖八.司馬懿分不清楚孔明的兵力多寡，即使孔明不用計還是不知道，因此不論兵力多寡，孔明使用空城計司馬懿認為都是一樣的情況(以紅色虛線連接)。同理，不論兵力多寡，孔明不用計司馬懿也認為是一樣的情況(以綠色虛線連接)。意即司馬懿不知道自己處在什麼狀態之下(陷於五里霧中)。(圖片來源：自繪，靈感來自本校教授期中考試題)



圖九.將圖八的擴展式賽局用棋盤式方格表示，可以清楚的看見司馬懿有訊息集的產生(兵多和兵少兩種狀況被藍色的大框框包起來)，而孔明澤完全了解自己處於何種狀態之下。司馬懿思考的方向有兩個，他可以猜測現在是兵多的狀態(state)，即左邊的賽局，或者是兵少的狀態，右邊的賽局。司馬懿猜測的機率用粉紫色框框表示，分別為 0.8 和 0.2。用這個圖形可以更清楚的算出期望報酬。(圖片來源：自繪)

a.

|    | (用計，用計)          | (用計，不用計)            | (不用計，用計)         | (不用計，不用計)         |
|----|------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| 進攻 | $0.8x(-6)+0.2x9$ | $0.8x(-6)+0.2x(11)$ | $0.8x(-9)+0.2x9$ | $0.8x(-9)+0.2x11$ |
| 退兵 | $0.8x0+0.2x(-3)$ | $0.8x0+0.2x(-3)$    | $0.8x1+0.2x(-3)$ | $0.8x1+0.2x(-3)$  |

b.

|    | (用計，用計) | (用計，不用計) | (不用計，用計) | (不用計，不用計) |
|----|---------|----------|----------|-----------|
| 進攻 | -3      | -2.6     | -5.4     | -5        |
| 退兵 | -0.6    | -0.6     | -0.6     | 0.2       |

圖十.利用圖九方便的表格計算出期望報償。圖 a.期望報酬的計算式。圖 b.期望報酬的數值結果。  
(圖片來源：自繪)